SOLUCIONES -2ª EVALUACIÓN – 1º EJERCICIO – 1º_BCS

1. Opera y simplifica todo lo que sea posible la siguiente expresión con fracciones algebraicas:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}}$$

Solución:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}}{\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x}}=\frac{2x^2+1}{-1}=-2x^2-1$$

---

2. Divide el número 553 en dos partes, de modo que, al dividir la mayor entre la menor, se obtenga 3 de cociente y 65 de resto.

Solución:

Sea x la parte mayor ⇒ $553-x$ será la parte menor.

$$\begin{array}{l|l} x & 553\text{-}x \\ \cline{2-2} 65 & 3 \end{array}$$

De la división se deduce que: $x=3\cdot(553-x)+65 \Rightarrow x=1724-3x \Rightarrow x=431$

La parte mayor será 431 y la menor $553-431=122$

3. Un cine tiene igual número de filas que de butacas por fila. El propietario decide remodelarlo quitando una butaca por fila y tres filas. Después de la remodelación el número de butacas es de 323. ¿Cuántas butacas tenía el cine antes de la remodelación?

Solución:

Sea x el número de filas inicial que coincide también con el número de butacas por fila.

Al remodelar se quita una fila, luego quedan $x-1$ filas y se quitan tres butacas por fila, luego quedan $x-3$ butacas por fila. Como hay 323 butacas, el planteamiento queda:

$$(x-1)(x-3)=323 \Rightarrow x^2-4x-320=0 \Rightarrow x=20$$

Si, inicialmente, había 20 filas y 20 butacas por fila el número de butacas antes de la remodelación era de $20^2 = 400$ butacas.

---

4. Un comerciante tiene 10 litros de mezcla de agua y vino. Al probarla nota que es demasiado ligera, por lo que decide añadir una cierta cantidad de vino, y entonces la cantidad de agua representa el 30% de la mezcla total. Como sigue notando que la mezcla continúa con un sabor poco fuerte, añade de nuevo la misma cantidad de vino, representando entonces el agua un 20% del total de la mezcla. ¿Cuántos litros de agua y cuántos de vino tiene la mezcla final?

Solución:

Definimos las incógnitas x = agua de la mezcla, y= cantidad de vino inicial de la mezcla, y $z=$ cantidad de vino que se le añade cada vez. Siguiendo el texto, el planteamiento queda:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 10 \\ x & = & \dfrac{30}{100}(10+z) \\ x & = & \dfrac{20}{100}(10+2z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 10 \\ 10x & = & 30+3z \\ 10x & = & 20+4z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 6 \\ y & = & 4 \\ z & = & 10 \end{array}$$

La mezcla final tendrá 6 litros de agua y 24 litros de vino.

---

5. Resuelve, si es posible, y razonadamente los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 3 \\ x+y-3z & = & 3 \\ 2x+3y+z & = & 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 3 \\ 2y+3z & = & 2 \\ 3x+y+3z & = & 7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y-z & = & 1 \\ x+3y-2z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 3 \\ x+y-3z &=& 3 \\ 2x+3y+z &=& 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Como los rangos valen 3 y coinciden con el número de las incógnitas, el sistema será compatible determinado, con el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 3 \\ y+4z &=& 0 \\ z &=& -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x &=& -4 \\ y &=& 4 \\ z &=& -1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 3 \\ 2y+3z &=& 2 \\ 3x+y+3z &=& 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como los rangos coinciden (valen 2) y su número es menor que el número de las incógnitas, el sistema será compatible indeterminado. El sistema tiene dos incógnitas principales y una secundaria o paramétrica. Resolvemos el sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 3 \\ 2y+3z &=& 2 \end{array}\right\}$$

Tomando z como incógnita libre $z = k \in \mathbb{R}$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y &=& 3-2k \\ 2y &=& 2-3k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{4-k}{2} \\ y &=& \dfrac{2-3k}{2} \\ z &=& k \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ y-z &=& 1 \\ x+3y-2z &=& 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Como el rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el de la ampliada es 3 el sistema es incompatible.

---

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $-8x^3 \cdot \left(4 + \frac{8}{x}\right) + 1 = \frac{8}{x} + 5$
   b) $\left[x \cdot (x-3) - 2 \cdot (x^2-4) - 8\right] \cdot \left[\frac{2x-3}{x^2-1} - \frac{3-x}{x+1}\right] = 0$

Solución:

a) $-8x^3 \cdot \left(4 + \frac{8}{x}\right) + 1 = \frac{8}{x} + 5 \Rightarrow -8x^3 \cdot \left(4 + \frac{8}{x}\right) = \frac{8}{x} + 4$

Si $4 + \frac{8}{x} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x} = -4 \Rightarrow x = -2$

Si $4 + \frac{8}{x} \neq 0 \Rightarrow -8x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

---

b) $\left[x \cdot (x-3) - 2 \cdot (x^2-4) - 8\right] \cdot \left[\frac{2x-3}{x^2-1} - \frac{3-x}{x+1}\right] = 0$

Como es una ecuación factorizada con producto nulo, anulamos cada factor:

$$x \cdot (x-3) - 2 \cdot (x^2-4) - 8 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0$$

De donde sacamos las soluciones $x = 0$, $x = -3$

$$\frac{2x-3}{x^2-1} - \frac{3-x}{x+1} = 0 \Rightarrow 2x - 3 - (x-1)(3-x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

De donde sacamos las soluciones $x = 0$, $x = 2$