JUNIO' 07

Bloque A

1A- Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20% del total, Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas. Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 céntimo por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

Julia (hojas que reparte) x

Clara (hojas que reparte) y

Miguel (hojas que reparte) z

$$\left\{\begin{array}{l} y = 0{,}2(x+y+z) \\ z = 100 + x \\ x + y = 850 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} 0{,}2x & -0{,}8y & +0{,}2z & = 0 \\ -x & & +z & = 100 \\ x & +y & & = 850 \end{array}\right.$$

Resolver por sustitución

$$z = 100 + x$$
$$y = 850 - x \longrightarrow 0{,}2\cdot x - 0{,}8(850 - x) + 0{,}2\cdot(100 + x) = 0$$

$$0{,}2x + 0{,}8x - 680 + 20 + 0{,}2x = 0$$

$$1{,}2x = 660$$

$$x = \frac{660}{1{,}2} = 550$$

$$\downarrow$$

$$z = 100 + x = 650$$

$$y = 850 - 550 = 300$$

Julia reparte 550 hojas

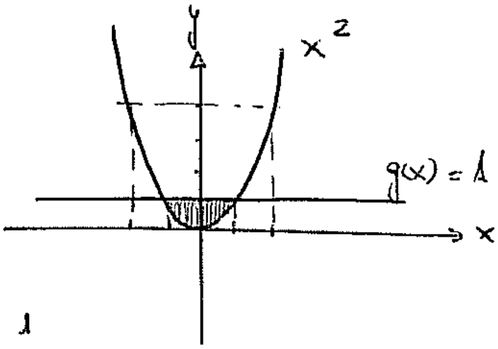
Clara reparte 300 hojas

Miguel reparte 650 hojas

2A- La superficie de *media* mesa está limitada por las funciones $f(x)=x^2$ y la recta $g(x)=1$, estando x expresado en metros. El barniz se vende en botes para cubrir una superficie de 2 metros cuadrados.
¿Cuántos botes necesitaremos comprar para barnizar *toda* la mesa y cuántos metros cuadrados podríamos barnizar con el barniz sobrante?

$f(x) = x^2$

$g(x) = 1$



$$A_{\text{media mesa}} = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} m^2$$

Por tanto, para barnizar todas la mesa necesitamos cubrir un superficie doble de $A_{\text{media mesa}} \Rightarrow \frac{8}{3} m^2 = 2,67 m^2$

Por tanto, si cada bote cubre $2m^2$, necesitaremos 2 botes.
El barniz sobrante será:

$$4m^2 - \frac{8}{3} m^2 = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3} m^2$$

Y eso supone que con el barniz sobrante podría barnizar media mesa más.

3A- El peso de los usuarios de un gimnasio tiene una media desconocida y una desviación típica $\sigma = 5.4$ kg. Tomamos una muestra aleatoria de 100 usuarios obteniendo una media de 60 kg.

a) Calcula con un nivel de confianza del 95% el intervalo de confianza para el peso medio de todos los usuarios.

b) Se realiza la siguiente afirmación: "el peso medio de un usuario de ese gimnasio está comprendido entre 58.5 y 61.5 kg.". ¿Con qué probabilidad esta afirmación es correcta?

$\sigma = 5{,}4$ Kg.

X = peso medio usuario

$n = 100$ usuarios $\rightarrow \bar{X} = 60$ kg

a) El intervalo de confianza de la media poblacional para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$ es

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

El intervalo pedido es:

$$\left(60 - 1{,}96 \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{100}} , 60 + 1{,}96 \cdot \frac{5{,}4}{\sqrt{100}} \right)$$

$$(58{,}9416 , 61{,}0584)$$

b) $P(58{,}5 \leq X \leq 61{,}5) = P(X \leq 61.5) - P(X \leq 58.5) =$

$P\left(Z \leq \dfrac{61.5 - 60}{\frac{5.4}{10}} \right) - P\left(Z \leq \dfrac{58.5 - 60}{\frac{5.4}{10}} \right) =$

$P(Z \leq 2{,}78) - P(Z \leq -2{,}78) =$

$P(Z \leq 2{,}78) - (1 - P(Z \leq 2.78)) = 2 \cdot P(Z \leq 2.78) - 1 =$

$2 \cdot 0{,}9973 - 1 = 0{,}9946$

$\hookrightarrow$ 99.46 %

4A.- Dos sucesos tienen la misma probabilidad igual a 0.5. La probabilidad de que ocurra uno de los sucesos sabiendo que ha ocurrido el otro es igual a 0.3. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos?

$$P(A) = P(B) = 0,5 \qquad \to ¿P(\bar{A} \cap \bar{B})?$$

$$P(A/B) = 0,3$$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0.3 \longrightarrow P(A\cap B) = 0,3 \cdot P(B) = 0,15$$

$$\boxed{P(\bar{A}\cap\bar{B})} = 1 - P(A\cup B) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A\cap B)\right) =$$

$$= 1 - (0,5 + 0,5 - 0,15) = \boxed{0,15}$$

Bloque B

1B- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$

a) Consideramos x e y dos variables, y a un parámetro. Obtén el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que resulta de plantear $AB - C = D$

b) Estudia el sistema para los distintos valores de a.

c) Encuentra una solución para $a = 2$.

a) $A\cdot B - C = D$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot x + y \\ y \end{pmatrix}$$

$$② \times 2 \qquad 2 \times ①$$

$$A\cdot B - C = D \Rightarrow \begin{pmatrix} ax + y - y \\ y - ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax \\ (1-a)\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax = 6-ay \\ (1-a)\,y = (1-a) \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax + ay = 6 \\ (1-a)y = 1-a \end{array} \right.$$

b)

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} \underbrace{\begin{matrix} a & a \\ 0 & 1-a \end{matrix}}_{A} & & \begin{matrix} 6 \\ 1-a \end{matrix} \end{array}\right)}_{A/B}$$

$|A| = a(1-a) = 0$

- si $a \neq 1$ y $a \neq 0$ Rango $(A) = 2 =$ Rango $(A|B)$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

- si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rango $(A) =$ Rango $(A|B) = 1 < 2$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

- Si $a = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Rango $(A) = 1$

Rango $(A|B) = 2$ $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

SISTEMA INCOMPATIBLE

c) Para $a = 2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow -y = -1 \rightarrow y = 1$$

$$2x + 2y = 6 \rightarrow x = \frac{6-2\cdot y}{2} = 2$$

Solución $(x,y) = (2,1)$

2B- Una discoteca abre sus puertas a las 10 de la noche sin ningún cliente y las cierra cuando se han marchado todos. Se supone que la función que representa el número de clientes (N) en función del número de horas que lleva abierto, t, es: $N(t) = 80\,t - 10\,t^2$.

a) Determina a qué hora el número de clientes es máximo. ¿Cuántos clientes hay en ese momento?

b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

$$N(t) = 80t - 10t^2$$

a) Para buscar el máximo hacemos la derivada y buscamos el máximo igualando a 0.

$$N'(t) = 80 - 20t = 0$$

$$\uparrow\ t = \frac{80}{20} = 4$$

Habrá un máximo de clientes al cabo de 4 horas de haber abierto → Por tanto, a las 2h de la madrugada.

Los clientes que hay : $N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 160$ clientes

b) Cerrará cuando no hay clientes, o sea, cuando $N(t) = 0$

$$80t - 10t^2 = 0$$

$$t(80 - 10t) = 0$$

$$\uparrow\ t = 0$$

$t = 8$ → cerrará después de 8 horas de haber abierto

↓

6h de la mañana

3B- El tiempo en minutos transcurrido hasta que una persona es atendida en la sucursal A de un banco sigue una distribución normal de media $\mu = 9$ y desviación típica $\sigma = 1$, mientras que el tiempo transcurrido hasta que es atendido en la sucursal B sigue, también, una distribución normal de media $\mu = 8.5$ y varianza $\sigma^2 = 4$.

a) Si un cliente tiene que hacer una gestión bancaria y sólo dispone de 10 minutos, ¿en qué sucursal A ó B será más fácil que le hayan atendido en el tiempo que dispone?

b) ¿Cuánto debe valer x si sabemos que el 80% de los clientes que van a la sucursal B esperan más de x minutos?

c) Un cliente, teniendo en cuenta la proximidad de estas dos sucursales a su casa, elige ir a la sucursal A con probabilidad 0.3 y a la sucursal B con probabilidad 0.7. Eligiendo una de las visitas al banco de este cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el cliente haya tenido que esperar más de 10 minutos?

$\mu_A = 9$ | $\mu_B = 8{,}5$

$\sigma_A = 1$ | $\sigma_B^2 = 4 \rightarrow \sigma_B = 2$

variable aleatoria X

↳ {"tiempo para ser atendido"}

a)

Para la sucursal A

$$P(X_A \leq 10) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tipificación} \\ Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}}{=} P\left(Z_A \leq \frac{10-9}{1}\right) = P(Z_A \leq 1) = 0{,}8413$$

Para la sucursal B

$$P(X_B \leq 10) = P\left(Z_B \leq \frac{10-8{,}5}{2}\right) = P(Z_B \leq 0{,}75) = 0{,}7734$$

Será más fácil que le atiendan en la sucursal A en el tiempo que dispone

b)

$$P(X_B \geq x) = 0{,}8 \longrightarrow 1 - P(X_B \leq x) = 0{,}8$$

$$P(X_B \leq x) = 0{,}2 \xrightarrow[\text{cambio de tipificación}]{} P\left(Z_B \leq \frac{x-\mu_B}{\sigma_B}\right) = 0{,}2$$

$$Z = \frac{x-\mu_B}{\sigma_B}$$

Observamos que en la tabla $P(Z_B \leq \boxed{Z}) = 0,2$ será válido si

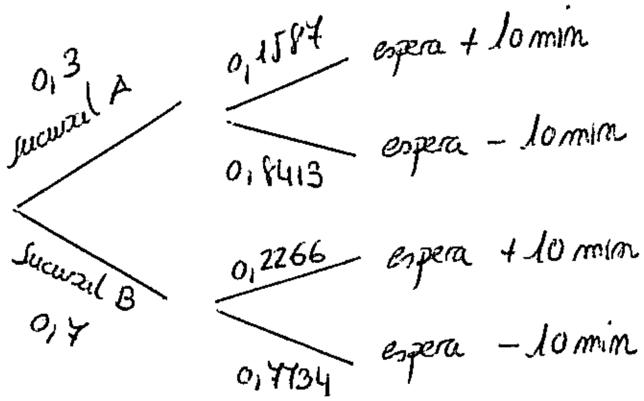
$$\frac{X-\mu_B}{\sigma_B} = -0,84$$

| este valor será negativo → $P(Z_B \leq -Z) =$
porque la tabla $1 - P(Z_B \leq Z) =$
solo se toma
para valores $P(Z_B \leq Z) = 0,8$
positivos a partir
de la media

$$\frac{X-8,5}{2} = -0,84$$

$X = 6,82$ minutos.

c)



$$P(\text{esperar} + 10 \text{ minutos}) = P(\text{sucursal A}) \cdot P(+10\text{ min}/\text{sucursal A}) + P(\text{sucursal B}) \cdot P(+10\text{ min}/\text{sucursal B}) =$$

$$0,3 \cdot 0,1587 + 0,7 \cdot 0,2266 = 0,2062$$

4B- En una joyería hay dos alarmas. La probabilidad de que se active la primera es 1/3, de que se active la segunda es 2/5 y de que se activen las dos a la vez es 1/15. ¿Cuál es la probabilidad de que se active alguna de las dos? ¿Y de que no se active ninguna una de ellas?

$P(\text{alarma 1 activada}) = P(A) = 1/3$

$P(\text{alarma 2 activada}) = P(B) = 2/5$

$P(A \cap B) = 1/15$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{5+6-1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$