El alumno debe responder a una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A1. Sean *a* un número real y el sistema lineal $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$

a) *(1,5 puntos)* Calcule el determinante de la matriz de los coeficientes y determine para qué valores de *a* el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado.

b) *(1 punto)* Resuelva el sistema anterior en el caso $a=0$

SOLUCIÓN.

a) Sea A la matriz de los coeficientes y B la matriz ampliada. $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+1-a-a-a = a^3-3a+2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$a^2+a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}= \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$a^3-3a+2=0 \iff (a-1)^2(a+2)=0 \Rightarrow a=1 \quad , \quad a=-2$

- Para $a\neq 1$ y $a\neq -2$: $\text{rg } A = \text{rg } B = 3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado
- Para $a=1$: las matrices de los coeficientes y ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ tienen ambas rango 1. El sistema es compatible indeterminado.
- Para $a=-2$: la matriz de los coeficientes tiene rango 2 pues el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ y la matriz ampliada tiene rango 3 pues el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16-2+1+2-4-4 \neq 0$. El sistema es incompatible.

b) El sistema es compatible determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer.

$$\begin{cases} y+z=1 \\ x+\quad z=0 \\ x+y\quad =0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2}=-\frac{1}{2} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2} \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2}$$

A2. *(2,5 puntos)* Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx$

SOLUCIÓN.

Descomponemos la función racional en suma de fracciones simples:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -2 & 12 \\ -2 & & -2 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^2-4x+6=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2}$$

$$\Rightarrow x^3-2x^2-2x+12=(x+2)(x^2-4x+6)$$

$$\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+6}=\frac{Ax^2-4Ax+6A+Bx^2+Cx+2Bx+2C}{(x+2)(x^2-4x+6)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-4A+2B+C)x+(6A+2C)}{x^3-2x^2-2x+12} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 & B=1-A & \Rightarrow B=2 \\ -4A+2B+C=11 \Rightarrow & -4A+2-2A-3A=11 & \Rightarrow A=-1 \\ 6A+2C=0 & C=-3A & \Rightarrow C=3 \end{cases}$$

Se tiene entonces: $\displaystyle\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx=\int\frac{-1}{x+2}\,dx+\int\frac{2x+3}{x^2-4x+6}\,dx=(1)$

Calculemos cada una de las integrales:

$$\int\frac{-1}{x+2}\,dx=-\ln|x+2|$$

$$\int\frac{2x+3}{x^2-4x+6}\,dx=\int\frac{2x-4+7}{x^2-4x+6}\,dx=\int\frac{2x-4}{x^2-4x+6}\,dx+\int\frac{7}{x^2-4x+6}\,dx=\ln\left|x^2-4x+6\right|+7\int\frac{1}{x^2-4x+6}\,dx=(2)$$

$$\int\frac{1}{x^2-4x+6}\,dx=\int\frac{1}{(x-2)^2+2}\,dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}}$$

Por tanto: $\displaystyle(2)=\ln\left|x^2-4x+6\right|+\frac{7\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow (1)=-\ln|x+2|+\ln\left|x^2-4x+6\right|+\frac{7\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C$

Es decir: $\displaystyle\int\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx=\ln\left|\frac{x^2-4x+6}{x+2}\right|+\frac{7\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C$

A3. a) *(0,75 puntos)* Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

b) *(1 punto)* Hallar el valor de k para que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+kx}{x-\mathrm{sen}\,x}=2$

c) *(0,75 puntos)* Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función real de variable real, continua y derivable en la recta real. Supongamos que $f(0)\neq 0$ y $f(x+y)=f(x)f(y)$ para todo número real x, y. Demostrar que $f(0)=1$; $f(x)\neq 0$; $f(x)>0$ y $f'(x)=f'(0)f(x)$ para todo número real x.

SOLUCIÓN.

a) Sean $12-x$ y x los dos sumandos positivos. La función $f(x)=(12-x)\cdot x^2=12x^2-x^3$ debe ser máxima.

$f'(x)=24x-3x^2=0 \Rightarrow 3x(8-x)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=8$ (valores críticos)

$f''(x)=24-6x$: $f''(0)=24>0 \Rightarrow x=0$ mínimo ; $f''(8)=-24<0 \Rightarrow x=8$ máximo

Por tanto, los dos sumandos deben ser 4 y 8.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+kx}{x-\mathrm{sen}\,x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+k}{1-\cos x}=\frac{2+k}{0}=(1)$

Para que el límite sea 2, k debe ser igual a -2 para que (1) sea una indeterminación $\frac{0}{0}$ (en caso contrario el límite es ∞). Comprobemos el valor del límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\mathrm{sen}\,x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\mathrm{sen}\,x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

c)
- $f(0)=f(0+0)=f(0)\cdot f(0)=[f(0)]^2 \Rightarrow f(0)[f(0)-1]=0 \Rightarrow f(0)=1$ pues $f(0)\neq 0$
- $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2>0$
- $\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)[f(h)-1]}{h}=(1)$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0)\cdot f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0)\left[f(h)-1\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$ y sustituyendo en (1):

$$(1)=f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\cdot f'(0)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=f(x)\cdot f'(0)$$

A4. a) *(1 punto)* Hallar el plano que contiene a la recta v de ecuación paramétrica $v:\ (2,1,3)+t(2,1,0)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x+z=2$

b) *(1,5 puntos)* Probar que los vectores $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y dar las coordenadas del vector $(1,-2,0)$ en la base anterior.

SOLUCIÓN.

a) Un plano queda determinado por un punto y dos vectores con distinta dirección. El plano que buscamos contiene a la recta v, luego contiene al punto $P(2,1,3)$ y al vector direccional $\vec{v}=(2,1,0)$. También contiene al vector normal al plano $x+z=2$, $\vec{n}=(1,0,1)$, que es perpendicular a él. Por tanto, el plano buscado es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x-2-z+3-2y+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x-2y-z+3=0$$

b) Basta comprobar que los tres vectores son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \quad\Rightarrow$$ son linealmente independientes y forman una base de $\mathbb{R}^3$.

$$(1,-2,0)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,00)=(x+y+z,x+y,x)\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y\quad\ =-2 \\ x\qquad\quad =0 \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{matrix} x=0 \\ y=-2 \\ z=3 \end{matrix}$$

OPCIÓN B

B1. a) *(1,5 puntos)* Comprueba que la matriz M es inversible y calcule su inversa, donde $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) *(1 punto)* Encuentre las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones

$$8A-5B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\quad,\quad 2A-B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) M es inversible si $|M|\neq 0$: $\quad |M|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2+4+1-2=5\neq 0 \quad\Rightarrow\quad$ M tiene inversa.

- Calculemos la matriz adjunta $(\mathrm{Adj}M)$ y después la traspuesta de la adjunta $(\mathrm{Adj}M)^t$:

$$a_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0\ ;\ a_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-5\ ;\ a_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5\ ;\ a_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2\ ;\ a_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3$$

$$a_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-2\ ;\ a_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\ ;\ a_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\ ;\ a_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1$$

Luego $(\mathrm{Adj}M)=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad (\mathrm{Adj}M)^t=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

- Por último: $M^{-1}=\dfrac{(\mathrm{Adj}\,M)^t}{|M|}=\begin{pmatrix}0 & 2/5 & -1/5\\ -1 & 3/5 & 1/5\\ 1 & -2/5 & 1/5\end{pmatrix}$

b) Sean P y Q las matrices conocidas. Se tiene:

$$\begin{cases}8A-5B=P\\ 2A-B=Q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8A+5B=-P\\ 8A-4B=4Q\end{cases}\Rightarrow \text{Sumando}:\ B=4Q-P \Rightarrow A=\frac{1}{2}(5Q-P)\quad \text{es decir:}$$

$$A=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}5 & -20 & 0\\ 10 & -5 & 15\\ 0 & 5 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & -11 & 0\\ 6 & -3 & 6\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}4 & -16 & 0\\ 8 & -4 & 12\\ 0 & 4 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -18 & 0\\ 10 & -5 & 9\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

B2. a) *(1,5 puntos)* Calcule la siguiente integral indefinida $\int \cos(\ln x)\,dx$

(Ayuda: realice un cambio de variable adecuado para esta integral)

b) *(1 punto)* Calcule el límite siguiente $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)\ln\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)\right]$

SOLUCIÓN.

a) Realizamos el cambio de variable $\ln x=t \Rightarrow \dfrac{1}{x}dx=dt \Rightarrow dx=x\,dt=e^t\,dt$

$$\int\cos(\ln x)\,dx=\int\cos t\cdot e^t\cdot dt=\left|\begin{array}{l}u=\cos t \Rightarrow du=-\mathrm{sen}\,t\,dt\\ dv=e^t\,dt \Rightarrow v=e^t\end{array}\right|=e^t\cdot\cos t+\int e^t\cdot \mathrm{sen}\,t\cdot dt=$$

$$\left|\begin{array}{l}u=\mathrm{sen}\,t \Rightarrow du=\cos t\,dt\\ dv=e^t\,dt \Rightarrow v=e^t\end{array}\right|=e^t\cdot\cos t+e^t\cdot\mathrm{sen}\,t-\int e^t\cdot\cos t\cdot dt \Rightarrow 2I=e^t(\cos t+\mathrm{sen}\,t) \Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}e^t(\cos t+\mathrm{sen}\,t)+K \Rightarrow \int\cos(\ln x)\,dx=\frac{1}{2}e^{\ln x}\left[\cos(\ln x)+\mathrm{sen}(\ln x)\right]+K=\frac{1}{2}x\left[\cos(\ln x)+\mathrm{sen}(\ln x)\right]+K$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^2}{x+3}\right)\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\right]=\infty\cdot 0=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}\right]=(1)$$

Calculemos $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{x-1}{6}\cdot\frac{6}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{6}}\right)^{\frac{x-1}{6}}\right]^{\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{6}{x-1}}=e^6$$

Por tanto: $(1)=\ln\left(e^6\right)=6$

B3. Sea f la función de variable real definida mediante la expresión $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de continuidad, simetrías, corte con los ejes y asíntotas de la función.

b) *(1 punto)* Calcule, si existen, los extremos relativos y absolutos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) *(0,5 puntos)* Calcule, si existen, los puntos de inflexión de f.

d) *(0,5 puntos)* Dibuje la gráfica de f.

SOLUCIÓN.

a)
- $D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua $\forall\ x$.
- $f(-x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}=-f(x) \Rightarrow$ la función es impar (simétrica respecto al origen de coordenadas)
- Corte con OX: $2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$. El origen de coordenadas también es el punto de corte con OY.
- La función no tiene asíntotas verticales pues no hay valores de x para los que la función tienda a infinito.

$y=0$ es una asíntota horizontal de la función pues: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=0^-$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}=0^+$.

b) $f'(x)=\dfrac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=-1\;,\; x=1$

$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$
	-1		1	

Por tanto: la función es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y creciente en $(-1,1)$.

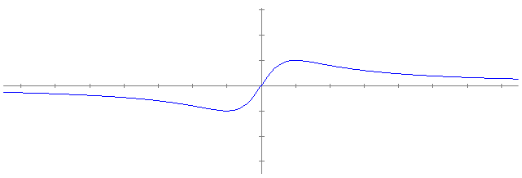
Como la función es continua, en $x=-1$, $(-1,-1)$, tiene un mínimo relativo y en $x=1$, $(1,1)$, un máximo relativo.

c) $f''(x)=\dfrac{-4x\left(x^2+1\right)^2-2\left(1-x^2\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\dfrac{-4x\left(x^2+1\right)\left(x^2+1+2+2x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$

$=\dfrac{-4x\left(x^2+1\right)\left(3x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\dfrac{-12x}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=0$ (posible punto de inflexión**)**

$f'''(x)=\dfrac{-12\left(x^2+1\right)^2+24x\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}$ y como $f'''(0)\neq 0 \;\Rightarrow\; x=0$ es un punto de inflexión: $(0,0)$

d)



B4. Sea el haz de planos de ecuación $(1+\lambda)x-y-\lambda z=0$ con parámetro real λ.

a) *(0,5 puntos)* Hallar los planos del haz que pasan por el punto $P=(1,1,1)$.

b) *(1 punto)* Hallar los planos del haz cuya distancia al punto $Q(3,-2,1)$ es $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

c) *(1 punto)* Hallar los planos del haz que cumplen que el ángulo que forman con el eje OY tiene por seno el valor $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

SOLUCIÓN.

a) Sustituimos las coordenadas del punto: $1+\lambda-1-\lambda=0 \;\Leftrightarrow\; 0=0 \;\Rightarrow$ Todos los planos del haz pasan por P (P pertenece a la recta común del haz).

b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\left|(1+\lambda)3+2-\lambda\right|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+1+\lambda^2}}=\dfrac{\left|2\lambda+5\right|}{\sqrt{2+2\lambda+2\lambda^2}} \;\Rightarrow\; 2\left|2\lambda+5\right|=3\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{1+\lambda+\lambda^2} \;\Rightarrow\; \left|2\lambda+5\right|=3\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}$

$\Rightarrow\; \left(\left|2\lambda+5\right|\right)^2=9\left(1+\lambda+\lambda^2\right) \;\Rightarrow\; 4\lambda^2+20\lambda+25=9+9\lambda+9\lambda^2 \;\Rightarrow\; 5\lambda^2-11\lambda-16=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \lambda=\dfrac{11\pm\sqrt{121+320}}{10}=\dfrac{11\pm 21}{10}=\begin{cases}\lambda=-1 \;\Rightarrow\; -y+z=0\\ \lambda=\dfrac{16}{5} \;\Rightarrow\; \dfrac{21}{5}x-y-\dfrac{16}{5}z=0 \;\Rightarrow\; 21x-5y-16z=0\end{cases}$

c) Un vector direccional de OY es $\vec{e}_2=(0,1,0)$ y un vector normal al plano $\vec{n}=(1+\lambda,-1,-\lambda)$.

Si es α el ángulo que forman la recta y el plano, se tiene:

$\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\left|\vec{e}_2\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{e}_2\right|\left|\vec{n}\right|} \;\Rightarrow\; \dfrac{\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\left|-1\right|}{\sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+1+\lambda^2}} \;\Rightarrow\; \dfrac{\sqrt{6}}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda^2+2\lambda+2}} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \sqrt{12}\sqrt{\lambda^2+\lambda+1}=6 \;\Rightarrow\; \lambda^2+\lambda+1=3 \;\Rightarrow\; \lambda^2+\lambda-2=0 \;\Rightarrow\; \lambda=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \pi_1\equiv 2x-y-z=0 \;;\; \pi_2\equiv -x-y+2z=0$